Lineare Algebra

by Danny Camenisch

Komplexe Zahlen

$z = \underbrace{x}_{\text{Re}} + \underbrace{y}_{\text{Im}}i = r\cdot(\cos(\varphi) + i\cdot\sin(\varphi))$ Polarform

$= r\cdot e^{i\varphi}$

$\bar{z} = x - iy = r\cdot e^{i(2\pi-\varphi)}$

$|z| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\cdot\bar{z}}$ $\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{I Q.} \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi & \text{II/III Q.} \\ \arctan\frac{y}{x} + 2\pi & \text{IV Q.} \end{cases}$

Operationen:

+/- : $(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\cdot i$

$z_1\cdot z_2$: $(x_1+y_1 i)\cdot(x_2+y_2 i)$

$= r_1\cdot r_2\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

$\frac{z_1}{z_2} : \frac{r_1}{r_2}\cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{|z_2|^2}$

$z^n : r^n\cdot e^{i\varphi n}$

$\sqrt{a} : a = z^n \Leftrightarrow |a|\cdot e^{i\alpha} = r^n\cdot e^{i\varphi n} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{|a|} \\ \varphi = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \end{cases}$ k=0,...,n-1 Haupt-werte

Polynome $P(z)=0$ lösen

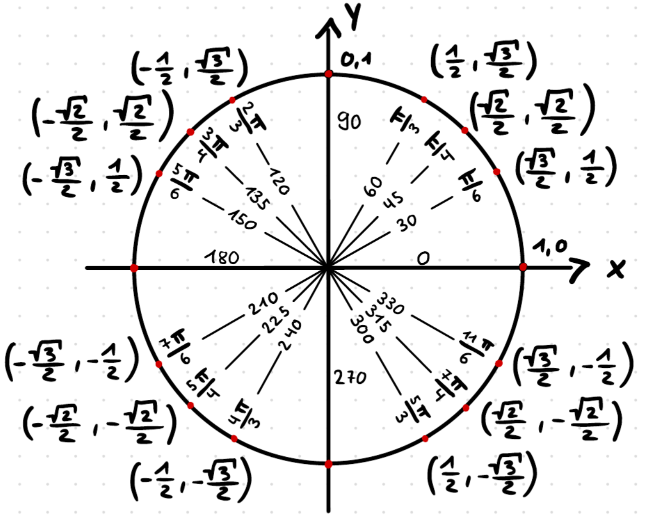
Grad 2: $z = \frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Sonderfall: $az^n + c = 0$

$\Leftrightarrow z = \sqrt[n]{-\frac{c}{a}}$

Bei Polynomen mit komplexen Nullstellen, tretten die NS als komplex, konjugiertes Paar auf

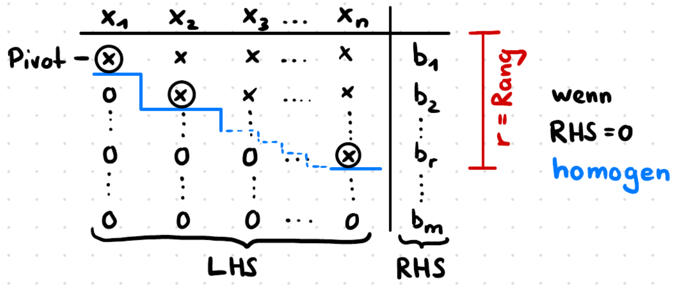
Bei einem Polynom über $\mathbb{C}$ mit ungradem Grad gibt es min. eine reelle Nullstelle.



LGS

Gauss-Algorithmus $O(n^3)$ Ziel: Zeilenstufenform

Operationen:
- Zeilen vertauschen
- Zeilen multiplizieren
- Zeilen +/-



Verträglichkeitsbedingungen: $b_{r+1} = \ldots = b_m = 0$

Anzahl Lösungen:

S.1.1. $Ax=b$ hat min. 1 Lösung $\Leftrightarrow$ $r=m$ od. $r<m$ + VB ist dass erfüllt so gilt:
- $r=n$ 1 Lösung
- $r<n$ ∞ Lösungen

$\Rightarrow r=m : \begin{cases} r=n=m & \text{1 Lsg regulär} \\ r<n & \infty\ \text{Lsg}\ (n-r)\ \text{freie Variablen} \end{cases}$

$\Rightarrow r<m : \begin{cases} r=n & \text{1 Lsg} \\ r<n & \infty\ \text{Lsg}\ (n-r)\ \text{freie Variablen} \end{cases}$

Bei einem homogenen LGS sind die VB immer erfüllt. Nur wenn $r<n$ gibt es nicht triviale LSG.

Matrizen & Vektoren

Eine $m\times n$ Matrix hat m Zeilen und n Spalten, wobei das i,j Element mit $a_{i,j}$ oder $(A)_{i,j}$ bezeichnet wird.

S.2.1.
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
- $(\alpha A)B = \alpha(AB)$
- $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$
- $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
- $A+B = B+A$
- $(A+B)+C = A+(B+C)$
- $(AB)\cdot C = A(BC)$
- $(A+B)\cdot C = AC+BC$
- $A(B+C) = AB+AC$

⚠ generell gilt $AB \neq BA$ (nicht kommutativ)
wenn $AB = BA$ kommutieren die Matrizen

Def. Wenn $AB = 0$, so sind A und B **Nullteiler**.

Def. Eine **Linearkombination** der Vektoren $a_1 \ldots a_n$ ist $\alpha_n\cdot a_n + \ldots + \alpha_1\cdot a_1$

Def. Eine Matrix ist **symmetrisch**, wenn $A^T = A$ und **Hermitesch** wenn $A^H = A$. (diag = reel)

Def. Eine Matrix ist **schiefsymmetrisch**, wenn $A^T = -A$ gilt.

S.2.6.
- $(A^T)^T = A$
- $(\alpha A)^T = \alpha(A^T)$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T \leftarrow$ ⚠

S.2.7. $A^TA = AA^T$ (symmetrisch) | $\overbrace{AB = BA \Leftrightarrow AB \text{ symmetrisch}}^{\text{falls } A, B \text{ symmetrisch}}$

Skalarprodukt und Norm (euklidisch)

Das eukl. **Skalarprodukt**: $\langle x, y\rangle = x^T y$ (inneres Produkt)

S.2.9.
- SP ist linear, $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$ und $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.
- SP ist symetrisch / Hermitesch $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
- SP ist positiv definit $\langle x, x\rangle > 0$, sonst $x = 0$.

Die eukl. **Norm**: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x^T x}$ (Länge von x)

S.2.11. **Schwarzsche Ungleichung**: $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|$ das Gleich gilt wenn y ein Vielfaches von x ist.

S.2.12. Für die eukl. /2-Norm gilt:
- positiv definit $\|x\| > 0$ (= 0 wenn $x = 0$)
- $\|\alpha x\| = |\alpha|\cdot\|x\|$
- **Dreiecksungleichung**: $\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Def. **Winkel** φ zwischen x, y : $\varphi = \arccos\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}$

Def. x, y sind **orthogonal**, wenn $\langle x, y\rangle = 0$; $x \perp y$

S.2.13. **Pytagoras**: $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ falls $x \perp y$

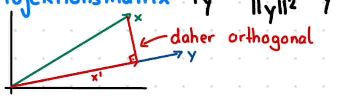
Def. **p-Norm**: $\|x\|_p = (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}$

Āusseres Produkt und Projection

Das **äussere Produkt** ist die Matrix die entsteht wenn wir zwei Vektoren x, y wiefolgt multiplizieren: $x\cdot y^T$. (Rang = 1)

S.2.15 Die **orthogonale Projektion** von x auf y ist gegeben durch: $P_y x = \frac{1}{\|y\|^2}\cdot yy^H x$

Def Die **Projektionsmatrix** $P_y = \frac{1}{\|y\|^2}\cdot yy^H$



Inverse

Def. Eine $n \times n$ Matrix A ist invertierbar, wenn eine Matrix A^{-1} existiert, so dass $A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$.

S.2.17. Es gilt:
- A ist invertierbar
- A ist regulär, $\text{Rang}\, A = n$
- $\exists X : AX = I_n$
- X ist eindeutig

S.2.18 Sind A, B regulär so gilt:
- A^{-1} ist regulär und $(A^{-1})^{-1} = A$
- AB ist regulär und $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
- A^H ist regulär und $(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$

S.2.19 Ist A regulär, so hat das LGS $Ax = b$ die eindeutige Lösung $x = A^{-1} b$.

Inverse finden $O(n^3)$: $\left[A \mid I\right] \xrightarrow[\text{operationen}]{\text{Zeilen-}} \left[I \mid A^{-1}\right]$

Falls $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ invertierbar, so ist

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Orthogonale / Unitäre Matrizen

Def. Eine Matrix heisst orthogonal / unitär, wenn $\underset{A^TA}{AA^T} = I_n$ / $\underset{A^HA}{AA^H} = I_n$.

$\det A = \pm 1$

S.2.20. Sind A und B unitär so gilt:
- A ist regulär und $A^{-1} = A^H$
- $AA^H = I_n$
- A^{-1} ist unitär
- AB ist unitär

das Gleiche gilt für orthogonale Matrizen

alle Spalten sind orthonormal

S.2.21. Abbildungen durch unitäre / orthogonale Matrizen sind längen- und winkeltreu.

Rotationsmatrix

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & & \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation der durch die die erste und dritte Achse aufgespannte Ebene

Blockmatrix

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array}\right) \quad \text{wenn invertierbar} \quad A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} \\ \hline a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} \end{array}\right)$$

Kann rechnen erleichtern.

LR-Zerlegung

Die LR-Zerlegung ist ein weiteres Verfahren zum lösen von LGS. Es ist besonders effektiv wenn wir mehrere LGS mit gleichem A haben.

1. Finde $PA = LR$
2. Löse $Lc = Pb$
3. Löse $Rx = c$

Wenn Zeilen vertauscht werden verändert sich P (pivoting).

Es ist nützlich wenn das Pivot $|x|$ möglichst gross ist.

Bsp.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc|ccc} & I & & & A & & & I & \\ 1&0&0&2&1&2&1&0&0 \\ 0&1&0&1&2&3&0&1&0 \\ 0&0&1&2&2&2&0&0&1 \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ -\tfrac{1}{2}\, i \\ -1\, i \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1&0&0&2&1&2&1&0&0 \\ 0&1&0&0&\tfrac{3}{2}&2&\tfrac{1}{2}&1&0 \\ 0&0&1&0&1&0&1&0&1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -\tfrac{2}{3}\, i \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1&0&0&2&1&2&1&0&0 \\ 0&1&0&0&\tfrac{3}{2}&2&\tfrac{1}{2}&1&0 \\ 0&0&1&0&0&-\tfrac{4}{3}&1&\tfrac{2}{3}&1 \\ & P & & & R & & & L & \end{array}$$

Vektorräume

Def. Ein Vektorraum V über $\mathbb{K}$ ist eine nicht leere Menge, auf der eine Vektoraddition und Skalarmultiplikation definiert sind.

Axiome:
- V1. $x + y = y + x$
- V2. $(x+y)+z = x+(y+z)$
- V3. $\exists 0 \in V : x + 0 = x$ – Nullvektor
- V4 $\forall x$ existiert $-x$: $x + (-x) = 0$
- V5. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$
- V6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
- V7. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
- V8. $1x = x$

S.4.1. i) $0 \cdot x = 0$ ii) $\alpha \cdot 0 = 0$ iii) $\alpha \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0$ od. $\alpha = 0$
iv) $(-\alpha) \cdot x = \alpha \cdot (-x) = -(\alpha x)$

Unterräume

Def. Ein Unterraum U ist eine nicht-leere Teilmenge von V, der abgeschlossen ist bzgl. addition und multiplikation. U beinhaltet immer den Nullvektor.

S.4.3. Jeder Unterraum ist ein Vektorraum.

Def. Die Menge der Linearkombinationen der Vektoren $v_1, \dots, v_n$ ist der Unterraum aufgespannt durch diese Vektoren $\longrightarrow \text{span}\{v_1, \dots, v_n\} \longrightarrow$ lineare Hülle von $v_1, \dots, v_n$.

Def. Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind ein Erzeugendensystem von V, wenn $\forall w \in V \Rightarrow w \in \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$.

Bsp. Sei V der VR der reelwertigen Funktionen über $\mathbb{R}$. Zeige, dass $U = \{f \in V : f(x+2\pi) = f(x)\} \subseteq V$.

Beweis der 3. Bedingungen

U_0: $\theta(x)$ = Nullfunktion
$\theta(x) = 0 = \theta(x+2\pi) \Rightarrow \theta \in U$

U_1: $X, Y \in U \Rightarrow X(x) = X(x+2\pi)$ und $Y(x) = Y(x+2\pi)$
$f := X + Y$, $f(x) = X(x) + Y(x) = X(x+2\pi) + Y(x+2\pi) = f(x+2\pi)$
$\Rightarrow f \in U$

U_2: $\alpha \in \mathbb{R}, W \in U \Rightarrow W(x) = W(x+2\pi)$
$\alpha W(x) = \alpha W(x+2\pi)$
$\Rightarrow \alpha W \in U$ $\square$

Lineare Abhängigkeit, Basen und Dimensionen

Def. Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind linear unabhängig, wenn kein Vektor eine LK der anderen Vektoren ist.
$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k v_k = 0$ only if $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Def. Eine $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\} = V$ ist eine Basis $\mathcal{B}$ von V, wenn $v_1, \dots, v_n$ l.u. sind.

Def. Die Dimension von V ist $\dim V = |\text{span}\, V|$. $\dim\{0\} = 0$

L.4.8. Jede Menge $\{v_1, \dots, v_m\} \subset V$ mit $|\mathcal{B}_V| < m$ ist linear abhängig.

K.4.10 In jedem endlichen VR, ist eine Menge von n l.u. Vektoren eine Basis von V, wenn $\dim V = n$.

Def. Die Koeffizienten ξ_k sind Koordinaten von x bzgl. einer Basis $\mathcal{B}$. $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ ist ein Koordinatenvektor und $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i b_i$ ist die Koordinatendarstellung von x bzgl. $\mathcal{B}$.

Def. Zwei Unterräume $U, U' \subset V$ sind komplementär, wenn jedes $v \in V$ eine eindeutige Darstellung $v = u \in U + u' \in U'$ hat. V ist dann die direkte Summe aus U und U': $V = U \oplus U'$.

Basiswechsel und Koordinatentransformation

Def. Wenn wir von einer alten Basis $\mathcal{B}$ zu einer neuen Basis $\mathcal{B}'$ wechseln, können wir die neue Basis mit der alten darstellen $b'_k = \sum_{i=1}^{n} \tau_{ik} b_i$, wobei $T = (\tau_{ik})$ die Basiswechselmatrix ist.

S.4.13. $\xi = T\xi'$ und $\xi' = T^{-1}\xi$. T ist invertierbar (regulär)

Def. Wollen wir die neu Basis gilt $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot T$

⚠ T ist von neu nach alt bei Koordinaten ⚠

Lineare Abbildungen

Def. Eine Abbildung $F: V \to W$ ist **linear**, wenn gilt:
- $F(v+w) = F(v) + F(w)$
- $F(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot F(v)$

$\Rightarrow F(\alpha v + w) = \alpha \cdot F(v) + F(w)$

Funktionen

Sei $F: X \to Y$ kann dies als eine Funktion $x \longmapsto f(x)$ betrachtet werden.

Def. **Injektiv**: $\forall x, x' \in X: f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
Surjektiv: $f(X) = Y$
Bijektiv: injektiv und surjektiv $\Rightarrow f^{-1}$ existiert

Matrixdarstellung von lineare Abbildungen

Sei F eine lineare Abbildung $X \mapsto Y$. $F(b_l) \in Y$ lässt sich als LK der Basen von Y schreiben, $F(b_l) = \sum_{k=1}^{m} a_{k,l} c_k$

Def. Die Matrix $A^{m \times n}$ mit Elementen $a_{k,l}$ heisst die **Abbildungsmatrix** bezüglich X, Y.

$F(x) = y \iff A\xi = \eta$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "k_X"'] & Y \arrow[d, shift right, "k_Y"'] \\
\mathbb{E}^n \arrow[r, "A"] \arrow[u, shift right, "k_X^{-1}"'] & \mathbb{E}^m \arrow[u, shift right, "k_Y^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Def. Ist F bijektiv, so ist es ein **Isomorphismus**, ist $X = Y$, ist es ein **Automorphismus**.

S.5.1. Ist F ein Isomorphismus, so existiert F^{-1} und ist auch ein Isomorphismus.

Kern, Bild und Rang

Def. Der **Kern** von F ist $\ker F = \{x \in X \mid F(x) = 0\}$ ist ein Unterraum von X. F injektiv $\iff \ker F = \{0\}$ S.5.6

Def. Das **Bild** von F ist $\operatorname{im} F = \{F(x) \mid x \in X\}$ ist ein Unterraum von Y. F surjektiv $\iff \operatorname{im} F = Y$

ker A = Lösungsmenge von $Ax = 0$
im A = Menge aller b, so dass $Ax = b$ lösbar ist

S.5.7. **Rangsatz**: $\underline{\dim X - \dim(\ker F) = \dim(\operatorname{im} F) = \operatorname{Rang} F}$

Def. Der Rang F ist gleich $\dim(\operatorname{im} F)$.

K.5.8.
- $F: X \to Y$ injektiv $\iff \operatorname{Rang} F = \dim X$
- $F: X \to Y$ surjektiv $\iff \operatorname{Rang} F = \dim Y$
- $F: X \to Y$ bijektiv $\iff \operatorname{Rang} F = \dim X = \dim Y$
  Isomorphismus
- $F: X \to X$ bijektiv $\iff \operatorname{Rang} F = \dim X$
  Automorphismus $\iff \ker F = \{0\}$

K.5.10.
- $\operatorname{Rang}(G \circ F) \leq \min(\operatorname{Rang} F, \operatorname{Rang} G)$
- G injektiv $\Rightarrow \operatorname{Rang}(G \circ F) = \operatorname{Rang} F$
- F surjektiv $\Rightarrow \operatorname{Rang}(G \circ F) = \operatorname{Rang} G$

Matrizen als lineare Abbildungen

Def. Der **Spaltenraum** von A ist der Unterraum $\mathcal{R}(A) = \operatorname{span}\{a_1, \dots, a_n\}$, $\operatorname{im} A = \mathcal{R}(A)$.

Def. Der **Nullraum** von A ist der Unterraum $\mathcal{N}(A) = \mathcal{L}_0(Ax=0)$, $\ker A = \mathcal{N}(A)$. # freie Variablen = $\dim \mathcal{N}(A)$

S.5.12. $\operatorname{Rang} A = r$ und $\mathcal{L}_0$ Lösungsmenge von $Ax = 0$
$\Rightarrow \dim \mathcal{L}_0 = \dim \mathcal{N}(A) = \dim(\ker A) = n - r$

S.5.13. $\operatorname{Rang} A \in \mathcal{M}^{m \times n}$:
- # Pivotelemente in REF
- $\dim(\operatorname{im} A)$
- dim des Zeilen-/Spaltenraum

K.5.14. $\operatorname{Rang} A^T = \operatorname{Rang} A^H = \operatorname{Rang} A$

S.5.16. $A \in \mathcal{M}^{m \times n}$ und $B \in \mathcal{M}^{p \times m}$:
- $\operatorname{Rang} BA \leq \min(\operatorname{Rang} A, \operatorname{Rang} B)$
- $\operatorname{Rang} B = m \leq p \Rightarrow \operatorname{Rang} BA = \operatorname{Rang} A$
- $\operatorname{Rang} A = m \leq n \Rightarrow \operatorname{Rang} BA = \operatorname{Rang} B$

S.5.18. Für quad. Matrizen sind folgende Aussagen äquivalent
- A ist regulär
- A ist invertierbar
- $\operatorname{Rang} A = n$
- Zeilen sind l.u.
- Spalten sind l.u.
- $\operatorname{im} A = \mathcal{R}(A) = \mathbb{E}^n$
- $\ker A = \mathcal{N}(A) = \{0\}$

S.5.19. Für $Ax = b, b \neq 0$ mit einer Lösung x_0 und $\mathcal{L}_0$, so ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}_b = x_0 + \mathcal{L}_0$ ein **affiner Teilraum**. Kein echter Unterraum da $0 \notin$

Finden einer Basis von

im A:
1. Zeilenstufenform nicht REF
2. Pivotspaltenmerken
3. Pivotspalten von A sind eine Basis von im A

ker A:
1. Zeilenstufenform
2. Freie Variablen finden
3. $\mathcal{L}_0$ von $Ax = 0$ als LK von Vektoren mit den freien Variablen als Koeff. Diese Vektoren bilden eine Basis.

Zauberzahlen m, n, r

Sei $A \in \mathcal{M}^{m \times n}$ mit $\operatorname{Rang} A = r$:

- $\dim(\operatorname{im} A) = \dim(\operatorname{im} A') \bar{=} r$, $\dim(\ker A) = n - r$, $\dim(\ker A') \bar{=} m - r$

$r = n \iff \ker A = \{0\}$
$\iff$ Spalten von A sind l.u.
$\iff$ Zeilen A sind erzeugend
$\iff$ A ist injektiv

$r = m \iff \ker A^T = \{0\}$
$\iff$ Spalten A sind erzeugend
$\iff$ Zeilen von A sind l.u.
$\iff$ A ist surjektiv

Abbildung von Koordinatentransformationen

Seien X und Y VR mit $\dim X = n$, $\dim Y = m$ und:
- $F: X \longrightarrow Y$ eine lineare Abbildung
- $A: \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^m, \xi \to \eta$, eine Abbildungsmatrix
- $B: \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^m, \xi' \to \eta'$, eine Abbildungsmatrix
- $T: \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^n, \xi' \to \xi$, eine Transformationsmatrix
- $S: \mathbb{E}^m \longrightarrow \mathbb{E}^m, \eta' \to \eta$, eine Transformationsmatrix

$$\begin{tikzcd}
x \in X \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "k_X"'] & Y \arrow[d, shift right, "k_Y"'] \\
\xi \in \mathbb{E}^n \arrow[r, "A"] \arrow[u, shift right, "k_X^{-1}"'] \arrow[d, shift right, "T^{-1}"'] & \eta \in \mathbb{E}^m \arrow[u, shift right, "k_Y^{-1}"'] \arrow[d, shift right, "S^{-1}"'] \\
\xi' \in \mathbb{E}^n \arrow[r, "B"] \arrow[u, shift right, "T"'] & \eta \in \mathbb{E}^m \arrow[u, shift right, "S"']
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A &= SBT^{-1} \\ B &= S^{-1}AT \end{aligned}}$$

Wenn $F: X \to X$, gilt:
$A = TBT^{-1}$
$B = T^{-1}AT$

S.5.20. Hat F Rang r, so besitzt bzgl. geeigneten Basen von X, Y die Abbildungsmatrix:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vektorräume mit Skalarprodukt

Def. Eine **Norm** in einem VR ist eine Funktion $|\cdot|: V \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow \|x\|$ mit den Bedingungen:
- N1. **positiv definit**: $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- N2. **homogen**: $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- N3. **Dreiecksungleichung**: $\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Ein VR mit Norm ist ein **normierter VR**.

Def. Ein **Skalarprodukt** ist eine Funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \to \mathbb{E}$, $x, y \longrightarrow \langle x, y \rangle$. Dabei gilt:
- S1. **Linear im zweiten Faktor**: $\langle x, \alpha(y+z) \rangle = \alpha(\langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle)$
- S2. **Symmetrisch / Hermitesch**: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- S3. **Positiv definit**: $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Bsp.
Eukl. Norm: $\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$
Maxnorm: $\|p\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |p(x)|$
P-Norm: $\|x\|_p = (x_1^p + \dots + x_n^p)^{1/p}$

Eukl. SP.: $\langle x, y \rangle = x^T y$

Def. **Einheitskugel**: die Menge $\{x \in V \mid \|x\| = 1\}$

Def. Die **induzierte Norm** oder **Länge** eine Vektors ist definiert durch: $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$, $\|x\| \to \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Def. Der **Winkel** $\varphi = \sphericalangle(x, y)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ ist definiert:

$$\varphi = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \quad \text{oder} \quad \arccos \frac{\operatorname{Re}\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Def. Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn $\langle x, y\rangle = 0$, $x \perp y$. Zwei Teilmengen sind orthogonal, wenn $\forall x \in M$, $\forall y \in N$ $\langle x, y\rangle = 0$, $M \perp N$.

S.6.1. Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $|\langle x,y\rangle|^2 \leq \overset{\|x\|^2 \cdot \|y\|^2}{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle}$

S.6.2. Pytagoras: wenn $x \perp y$ gilt $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Def. Eine Basis ist orthogonal, wenn $\langle b_l, b_k\rangle = 0$ für alle $b_l \neq b_k$. Wenn alle Basisvektoren Länge 1 haben ist sie orthonormal.

S.6.4. Sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis und $x \in V$ gilt:

$$x = \sum_{k=1}^n \langle b_k, x\rangle b_k \Rightarrow \xi_k = \langle b_k, x\rangle$$

S.6.5. Parsevalsche Formel: aus $\xi_k = \langle b_k, x\rangle_V$, $\eta_k = \langle b_k, x\rangle_V$ folgt

$$\langle x, y\rangle_V = \sum_{k=1}^n \overline{\xi_k}\,\eta_k = \xi^H \eta = \langle \xi, \eta\rangle_{\mathbb{E}^n}$$

D.h. wenn die Basis in V orthonormal ist gilt SP in V = eukl. SP in $\mathbb{E}^n$.

$\Rightarrow \|x\|_V = \|\xi\|_{\mathbb{E}^n}$, $\measuredangle(x,y)_V = \measuredangle(\xi,\eta)_{\mathbb{E}^n}$, $x \perp y \Leftrightarrow \xi \perp \eta$

Alg: Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren

- $b_1 = a_1 / \|a_1\|_V$
- $\widetilde{b}_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle b_j, a_k\rangle_V \cdot b_j$
- $b_k = \widetilde{b}_k / \|\widetilde{b}_k\|_V$

S.6.6 Nach k-Schritten sind $\{b_1, \ldots, b_k\}$ paarweise orthonormal. Wenn $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Basis von V ist, ist $\{b_1, \ldots, b_n\}$ auch eine.

$\Rightarrow$ Jeder VR mit dim VR $< \infty$ hat eine Orthonormalbasis.

Def. $U^\perp$ ist das orthogonale Komplement vom U.R. U $U \oplus U^\perp = V$.

S.6.9. Für eine komplexe $m \times n$ Matrix mit Rang r gilt:

- $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^H)^\perp \subset \mathbb{E}^n$ $\quad$ - $\mathcal{N}(A^H) = \mathcal{R}(A)^\perp \subset \mathbb{E}^m$
- $\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A^H) = \mathbb{E}^n$ $\quad$ - $\mathcal{N}(A^H) \oplus \mathcal{R}(A) = \mathbb{E}^m$
- $\dim \mathcal{R}(A) = r$ $\quad$ - $\dim \mathcal{N}(A) = n-r$
- $\dim \mathcal{R}(A^H) = r$ $\quad$ - $\dim \mathcal{N}(A^H) = m-r$

Das sind die fundamentalen Unterräume. Für reele Matrizen kann A^H mit A^T ersetzt werden.

Basiswechsel und Koordinatentransformation von Orthonormalbasen

Wir wollen von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$, wobei beides Orthonormalbasen sind. Wir können $b'_k = \sum_{j=1}^n T_{jk} b_j$ schreiben und erhalten die Basiswechselmatrix T. Da $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ orthonormal sind gilt $T^{-1} = T^H$.

Daher gilt $\xi = T\xi'$ und $\xi' = T^H \xi$. Zudem ist $\mathcal{B} = \mathcal{B}'T$ und $\mathcal{B}' = \mathcal{B}T^H$, wobei alle Matrizen unitär/orthogonal sind.

S.6.10. Die Transformationsmatrix einer Basistransformation zwischen Orthonormalbasen ist unitär/orthogonal.

K.6.12. $\langle x, y\rangle_V = \xi^H \eta = \langle \xi, \eta\rangle = \langle \xi', \eta'\rangle = \xi'^H \eta'$

$\Rightarrow$ T ist längen- und winkeltreu.

$$\begin{tikzcd}
x \in X \arrow[rrr, "F"] \arrow[d, shift right, "k_X"'] & & & Y \arrow[d, shift right, "k_Y"'] \\
\xi \in \mathbb{E}^n \arrow[rrr, "A"] \arrow[u, shift right, "k_X^{-1}"'] \arrow[d, shift right, "T^H"'] & & & \eta \in \mathbb{E}^m \arrow[u, shift right, "k_Y^{-1}"'] \arrow[d, shift right, "S^H"'] \\
\xi' \in \mathbb{E}^n \arrow[rrr, "B"] \arrow[u, shift right, "T"'] & & & \eta \in \mathbb{E}^m \arrow[u, shift right, "S"']
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A &= SBT^H \\ B &= S^HAT \end{aligned}}$$

Wenn $F: X \to X$, gilt:
$A = TBT^H$
$B = T^HAT$
$\Rightarrow$ A, B sind Hermitesch/reel-symetrisch

Orthogonale/unitäre Abbildungen

Def. Eine lineare Abbildung $F: X \to Y$ ist unitär/orthogonal falls: $\langle F(v), F(w)\rangle_Y = \langle v, w\rangle_X$.

S.6.13.
1. F ist Längentreu/isometrisch: $\|F(v)\|_Y = \|v\|_X$
2. F ist winkeltreu: $v \perp w \Leftrightarrow F(v) \perp F(w)$
3. $\ker F = \{0\}$, F ist injektiv

Falls $n = \dim X = \dim Y < \infty$:

4. F ist ein Isomorphismus
5. $\{b_1, \ldots, b_n\}$ Orthonormalbasis von X $\Leftrightarrow \{F(b_1), \ldots, F(b_n)\}$ Orthonormalbasis von Y
6. F^{-1} ist unitär/orthagonal
7. Die Abbildungsmatrix A ist unitär/orthogonal.

Least Squares Methode

Sei $Ax = b$ ein überbestimmtes LGS (mehr Gleichungen als Variablen). Da es keine Lösung gibt, wollen wir es so lösen, dass $\|Ax - b\|_2^2$ möglichst klein ist.

D.h. wir suchen $x^* = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{E}^n} \|Ax - b\|_2^2$, dies ist der Fall, wenn $Ax - b$ senkrecht zur Hyperebene $\mathcal{R}(A)$ steht.

Def. Die Normalgleichung $A^HAx = A^Hb$ kann benutzt werden um solch ein LGS zu lösen.

Lemma. A^HA ist regulär $\Leftrightarrow$ Rang $= n$

Def. Wenn Rang $A = n$, so ist $A^+ = (A^HA)^{-1}A^H$ die Pseudoinverse von A, d.h. $A^+A = I$.

Determinanten

Die Determinanten für Matrizen der Grösse 1, 2, 3 sind gegeben durch:

$$\det(a_{11}) = a_{11} \qquad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} = \begin{aligned} &a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} \\ &+ a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

Def. Die Determinante einer quad. Matrix A ist

$$\det A = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sign}(p) \cdot a_{1p(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,p(n)}$$

Permutationen n!

1 od. -1
gerade ungerade

$$\boxed{\begin{aligned} \det A = 0 &\Leftrightarrow A \text{ ist singulär} \\ \det A \neq 0 &\Leftrightarrow A \text{ ist regulär} \end{aligned}}$$

Wichtige Eigenschaften

K.8.10 Gilt auch für Spalte statt Zeile

S.8.3.
i) det(A) ist linear in jeder Zeile

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ \alpha u_l + \beta w_l \\ \vdots \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} \vdots \\ u_l \\ \vdots \end{vmatrix} + \beta \cdot \begin{vmatrix} \vdots \\ w_l \\ \vdots \end{vmatrix}$$

ii) bei Zeilenvertauschung wechselt det(A) das Vorzeichen
iii) $\det(I) = 1$

S.8.4.
iv) hat A eine Nullzeile so ist $\det(A) = 0$
v) $\det(\gamma A) = \gamma^n \cdot \det(A)$
vi) hat A zwei gleiche Zeilen ist $\det(A) = 0$
vii) addiert man zu einer Zeile ein Vielfaches einer anderen ändert sich det(A) nicht
viii) ist A eine Diagonalmatrix, so ist $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$
ix) ist A eine Dreiecksmatrix, so ist $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$

S.8.5. Wenden wir Gauss auf A an gilt:

$$\det(A) = (-1)^v \cdot \prod_{k=1}^n r_{kk}$$

v = Zeilenvertauschungen
r_{kk} = Diagonalelemente der REF

S. 8.7. $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$

K. 8.8 A ist regulär ⇒ $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

S. 8.9. $\det(A^T)=\det(A)$ und $\det(A^H) = \overline{\det(A)}$

Falls $\det(A) \neq 0$ ist F eine bijektive Abbildung.

Determinante von Blockmatrizen

$$\det\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \det(A)\cdot\det(B)$$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Def. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{E}^n$ heisst Eigenwert der linearen Abb. $F: X \to X$, falls es $v \in V, v \neq 0$ gibt, so dass $F(v) = \lambda\cdot v$. Solch einen Vektor nennt man Eigenvektor.

Die Menge aller EV die zu λ gehören bilden einen U.R. $E_\lambda = \{v \in V \mid F(v) = \lambda\cdot v\}$.

Def. Die Menge aller EW von F heisst Spektrum von F.

Def. $\xi \in \mathbb{E}^n$ ist ein EV von λ, iff $A\xi = \lambda\xi$.

L.9.1. Eine lin. Abb. F und ihre Matrixdarstellung, haben die gleichen EW und die EV sind über die Koordinatenabbildung k_v verbunden.

L.9.2. λ ist ein EW, iff $\ker(A-\lambda I)$ nicht nur aus dem NV besteht (singulär). $E_\lambda = \ker(A-\lambda I)$.

Def. Die geometrische Vielfachheit von λ entspricht $\dim E_\lambda$.

Def. Das charakteristische Polynom ist definiert durch $\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda I)$. Wobei $\chi_A(\lambda) = 0$, die char. Gleichung ist.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Char. Polynom von } A \in R^{2\times 2} \\ \chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{spur}(A)\cdot\lambda + \det A\end{array}}$$

Def. Die Summe der Diagonalelemente einer Matrix A nennt man Spur A od. tr A.

$\Sigma_{i=0}^n \lambda_i$ = Spur und $\Pi_{i=0}^n \lambda_i$ = Determinante

S.9.5. $\lambda \in \mathbb{E}$ ist ein EW von $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$ ⇔ λ eine NS von χ_A
⇔ λ eine Lösung der char. Gleichung.

L.9.4.
$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= (-1)^n\cdot\lambda^n + (-1)^{n-1}\cdot\text{Spur } A\cdot\lambda^{n-1} + \ldots + \det A\cdot\lambda^0 \\ &= a_n\cdot\lambda^n + a_{n-1}\cdot\lambda^{n-1} + \ldots + a_0\cdot\lambda^0\end{aligned}$$

Def. Die algebraische Vielfachheit eines EW λ^* ist die Vielfachheit von λ^* als NS von $\chi_A(\lambda)$ (über $\mathbb{C}$).

S.9.13. $\boxed{\text{geom. Viel.} \leq \text{alg. Viel.}}$

Bei schiefsymetrischen Matrizen ($A^T = -A$) sind alle EW entweder 0 oder imaginär.

EW und EV finden

i) Bestimme das char. Polynom $\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda I)$
ii) Bestimme die Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ von χ_A. EW
iii) Für jedes λ_k bestimme die Menge an Lösungen für $(A-\lambda_k I)x = 0$. EV

S.9.7. Für ähnliche Matrizen A und C ($C = T^{-1}AT$) gilt:
- gleiches char. Polynom
- gleiche Spur
- gleiche Determinante
- gleiche Eigenwerte

S.9.11. EV zu verschiedenen EW sind linear unabhängig.
⇒ max. n = dim V verschiedene EW.

Sei λ ein EW von A, so ist λ^{50} ein EW von A^{50}.

$A \in \mathbb{E}^{n\times n}$, A Hermitesch ($A^H = A$):
- positiv definit: $\forall x, x \neq 0$ gilt $x^HAx > 0$
- positiv semidefinit: $\forall x$ gilt $x^HAx \geqslant 0$

Spektral-/Eigenwertzerlegung

Wenn $\mathbb{E}^n$ eine Basis aus EV von $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$ besitzt, so ist A ähnlich zu einer Diagonalmatrix Λ:

$$\boxed{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}}_{V} = \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}}_{V}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda} \qquad \boxed{A = V\Lambda V^{-1}}$$

Vorraussetzung für Diagonalisierbarkeit:
- char. Polynom zerfällt komplett in Linearfaktoren
- geom. Viel. = alg. Viel. für jeden EW

Eine Matrix A ist nur dann über ℝ diagonalisierbar, wenn alle EW reel sind.

S.9.14. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist diagonalisierbar ⇔ alg. Viel. = geom. Viel.

S.9.15. Spektralsatz: Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Hermitesch: $A^H = A$
i) alle EW sind reel
ii) die EV sind paarweise orthogonal
iii) es gibt eine orthonormale Basis aus EV
iv) für die unitäre Matrix U gilt: $U^HAU = \Lambda$

K.9.16. Dies gilt alles auch für reel-symmetrische Matrizen.

Def. A ist normal wenn $A^HA = AA^H$ ⇒ diagonalisierbar durch eine unitäre Matrix.

Singulärwertszerlegung

SVD existiert für jede Matrix. A^HA ist immer Hermitesch und positive definit. Dh. es existiert eine Spektralzerlegung.

$$\Rightarrow A^HAV = V\Lambda \xrightarrow{\lambda = \sigma^2} A^HAV_r = V_r\Sigma_r^2$$
$$\Rightarrow V_r^HA^HAV_r = \Sigma_r^2$$
$$\Rightarrow \underbrace{(\Sigma_r^{-1}V_r^HA^H)}_{:=U_r^{-1}}\underbrace{(AV_r\Sigma_r^{-1})}_{:=U_r} = I$$

Def. Für jede Matrix A existiert eine SVD, so dass U, V unitär und Σ diagonal ist. Σ ist positiv ⚠

$$\boxed{A = U\Sigma V^H} \quad \text{wobei } \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_r > \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_n = 0$$

$AA^H = U\Sigma_m^2U^H$, $A^HA = V\Sigma_n^2V^H$ und $A^H = V\Sigma^TU^H$

Def. Falls A invertierbar ist, gilt $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^H$.

Für Rang = r gilt:

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \{u_1,\ldots,u_r\}: \text{Basis von } \operatorname{Im} A = \mathcal{R}(A) \\ \bullet\ \{u_{r+1},\ldots,u_m\}: \text{Basis von } \operatorname{Ker} A^H = \mathcal{N}(A^H)\end{array}\right\}\text{links singulär vektoren}$$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \{v_1,\ldots,v_r\}: \text{Basis von } \operatorname{Im} A^H = \mathcal{R}(A^H) \\ \bullet\ \{v_{r+1},\ldots,v_n\}: \text{Basis von } \operatorname{Ker} A = \mathcal{N}(A)\end{array}\right\}\text{rechts singulär vektoren}$$

Def. Bei einer Selbstabbildung gilt:

$$A = U\Sigma V^H = V\underbrace{V^HU}_{R}\Sigma V^H = VR\Sigma V^H$$

Rotation/Spiegelung

Skalierung der Hauptachsen

Basiswechsel zu orthonormal Basis

Least Squares mit SVD

$$\|Ax-b\|_2^2 = \|\Sigma \underbrace{V^H x}_{y} - \underbrace{U^H b}_{c}\|_2^2 = \|\Sigma y - c\|_2^2$$

$x^* = V\Sigma^+ U^H b$ $\Rightarrow$ ∞ Lsg, hier kleinste 2-Norm $(y^* = \Sigma^+ U^H b)$

Wobei Σ^+ die Pseudoinverse von Σ ist, daher gilt auch $A^+ = V\Sigma^+ U$.

SVD berechnen

1. gesucht sind U, Σ, V
2. $A^H A = V\Sigma^H \Sigma V^H$ und EW finden.
   $\Rightarrow$ gibt Σ
3. $(A^H A - \lambda I)x = 0$ lösen um EV zu finden und diese normieren
   $\Rightarrow$ gibt V
4. $AV = U\Sigma$ nach U lösen mit $AV\Sigma^{-1} = U$.

Alternativ: $U = AV$ mit normalisierten Spalten.

5. Evtl. U_r zu U mit Gram-Schmidt

$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

$A^H A = \begin{pmatrix} 26 & 18 \\ 18 & 74 \end{pmatrix}$

$\det(A^H A - \lambda I) = \lambda^2 - 100\lambda + 1600$
$= (\lambda - 20)(\lambda - 80)$

$\Rightarrow \lambda_1 = 20 \quad \lambda_2 = 80$

$(A^H A - 20I)x = 0 \Rightarrow \tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$

$(A^H A - 80I)x = 0 \Rightarrow \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$

$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$ $\quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{80} & 0 \\ 0 & \sqrt{20} \end{pmatrix}$

$AV = \begin{pmatrix} 2\sqrt{10} & -\sqrt{10} \\ 2\sqrt{10} & \sqrt{10} \end{pmatrix}$ ⚠ $\sigma_1 \geq \sigma_2$

$= U\Sigma = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

QR-Zerlegung

Eine Matrix A kann dargestellt werden als

$A = QR$ wobei Q eine orthogonale Matrix und R eine obere Dreiecksmatrix ist.

Diese Zerlegung ist eindeutig wenn $m \geq n$ und Rang $A = n$.

QR-Zerlegung berechnen

① Gram-Schmidt auf den Spalten von A $\Rightarrow Q$

Ⓘⅰ $R = Q^T A$ lösen um R zu erhalten
↳ da Q orthogonal

Alternativ: $R =$
- $r_{11} = \|a_1\|$
- $r_{jk} = \langle q_j, a_k \rangle$
- $r_{kk} = \|\tilde{q}_k\|$

Least-Squares mit QR-Zerlegung

Normalgleichung:

$$\begin{aligned} A^T A x &= A^T b \\ (QR)^T (QR) x &= (QR)^T b \\ R^T Q^T Q R x &= R^T Q^T b \\ R^T R x &= R^T Q^T b \\ Rx &= Q^T b \end{aligned}$$

T kann durch H ersetzt werden

← einfach zu lösen

Ex. QR-Zerlegung finden

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad q_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} / \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

$\tilde{q}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

$q_2 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} / \left\| \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \right\|_2 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

$Q = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$ $\quad R = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

T : Transformationsmatrix für Basiswechsel

A : Abbildungsmatrix von F bezüglich einer Basis.

Multiple-Choice

↙ Menge von Vektoren

- ✓ · Sei $S \subset V$ und W ein Unterraum von V. Falls $S \subset W$ dann gilt $\operatorname{span} S \subset W$.
- ✗ · v_1, v_2, v_3 sind paarweise l. u. wenn $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$ und $\{v_2, v_3\}$ l.u. sind.
  → Die Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist l.u.
- ✗ · Sei $B \in \mathbb{E}^{3\times 1}$ und $C \in \mathbb{E}^{1\times 3}$ so kann BC Rang 3 haben
- ✓ · Sei $D \in \mathbb{E}^{2\times 2}$, $\dim(\ker D) = 2$ nur wenn $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- ✗ · Seien v_1 und v_2 EV von A, so ist $v_1 + v_2$ auch ein EV.
- ✗ · Sei Q unitär und $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$, so ist $\det QA = \det A$
  ↳ $|\det Q| = 1$ $\det QA = \pm \det A$ kommt auf die grösse von Q an.
- ✓ · Wenn A^2 invertierbar ist, ist A^3 auch invertierbar.
  ↳ $\det(A^2) \neq 0 \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow \det(A^3) \neq 0$
- ✓ · Falls A regulär und $A^2 = A$, dann $A = I$
- ✗ · Für x, y, z linear abhängig gilt $x = \alpha \cdot y + \beta \cdot z$.
  ↳ kann sein dass nur y, z linear abhängig sind
- ✓ · Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit n verschiedenen EW hat 2^n normierte Eigenwertzerlegungen.
  ↳ 2^n da wir n-Mal das Vorzeichen ändern können
- ✓ · Wenn $A, B, P \in \mathbb{E}^{n\times n}$ und P invertierbar mit $A = PBP^{-1}$, dann $\det A = \det B$
- ✓ · Falls $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$ und $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^n + 2$ ist A invertierbar
- ✓ · Falls A und $A^2 \in \mathbb{E}^{n\times n}$ und A^2 regulär, ist A^3 invertierbar
- ✗ · Falls λ_1 mit v und λ_2 mit w, so ist $\lambda_1 + \lambda_2$ ein EW mit EV $v+w$.

Sei A eine 3x3 Matrix mit EW 1, −1 und 0, so ist $\det(I + A^{50}) = ?$ 4, da $\lambda_1^{50} + 1 = 2$, $\lambda_2^{50} + 1 = 2$ $\lambda_3^{50} + 1 = 1$

Die Dimension des Unterraums aller schiefsymetrisch reelen 3x3 Matrizen ist:

✗ · 1 ✓ · 3 ✗ · 6 ✗ · 9

Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit EW $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

- ✓ · A ist diagonalisierbar wenn alle EW verschieden sind.
- ✗ · Falls A diagonalisierbar ist, müssen alle EW verschieden sein.
- ✗ · A ist diagonalisierbar, wenn A 3 EV hat.
  ↳ EV müssten l.u. sein
- ✓ · Falls $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1$ und $B = A^3 - 3A^2$ dann ist B diagonalisierbar.
- ✗ · Falls $AP = PD$ und D eine Diagonalmatrix, dann sind die Spalten von P EV von A.
  ↳ nur wenn die EW von A die Diagonale von D bilden

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $AB = -BA$:

- ✓ · $\det(AB) = \det(-BA)$
- ✗ · $\det(A) \cdot \det(B) = -\det(A) \cdot \det(B)$
  ↳ nur wenn n ungerade
- ✗ · Entweder A oder B hat eine 0-Determinante
- ✗ · A und B müssen singulär sein
- ✗ · $ABx = 0$ hat eine Schar von Lösungen
- ✓ · $ABx = c$ kann mehrere, eine und keine Lösung haben, wenn $c \in \mathbb{R}^2$, $c \neq 0$.
- ✗ · Es gilt zwingend $A = 0$ oder $B = 0$.

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, B ist regulär und $B = QR$.

- ✗ · $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \to \|Ax\|_2$, ist eine Norm in $\mathbb{R}^n$.
- ✓ · Wenn $\nexists k$ so dass A^k invertierbar, so ist A nicht invertierbar.
- ✓ · $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|x\|_2$
- ✗ · $\det B = \det R$
- ✓ · $\|B\|_2 = \|R\|_2$
- ✓ · $g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \to \|Qx\|_2$
- ✗ · AB ist regulär, aber BA nicht unbedingt
- ✗ · $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2$

Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und $b \in \mathbb{R}^2$. Nehmen wir an es existiert eine Lösung zu $Ax = b$.

- ✓ · $Ax = b$ hat immer ∞ Lösungen
  ↳ min. 1 freie Variable
- ✗ · Die Lösungsmenge zu $Ax = b$ bildet eine Gerade in 3D.
  ↳ kann auch Ebene sein, 1. od. 2 freie Variablen
- ✓ · Geometrisch entspricht $Ax = b$ dem schneiden von 2 Ebenen in 3D.

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit l.u. Spalten und $A = Q_1 R_1$, $A = Q_2 R_2$ zwei QR-Zerlegungen von A.

- ✗ · Rang $R_1 = m$
- ✓ · Rang $R_1 = n$
- ✗ · Rang $R_2 = m$
- ✓ · Rang $R_2 = n$
- ✓ · $Q_1^T Q_2$ ist regulär
- ✓ · $Q_1^T Q_2$ ist orthogonal
- ✓ · $Q_1^T Q_2$ ist eine o. Dreiecksm.
- ✓ · $Q^T Q_2$ ist eine u. Dreiecksm.
- ✓ · $Q_1^T Q_2$ ist eine Diag. matrix.
- ✗ · $Q_1^T Q_2 = I$

Welche der folgenden Aussagen über $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$ sind im Allgemeinen wahr.

- ✓ · $\operatorname{im} A = \operatorname{im} 2A$
- ✗ · $\operatorname{im} A = \operatorname{im} A^2$
- ✗ · $\operatorname{im} A = \operatorname{im} (A + I)$
- ✗ · $\operatorname{im} A = \operatorname{im} A^T$
- ✓ · $\ker A = \ker 2A$
- ✗ · $\ker A = \ker A^2$
- ✗ · $\ker A = \ker(A + I)$
- ✗ · $\ker A = \ker A^T$

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Ausserdem seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die EW zu EV $v_1, \dots, v_n$.

- ✗ · A^2 hat min. 1 EW mit strikt positiven Imaginärteil
- ✓ · Es gilt $\lambda_j > 0$ für alle $j = 1, \dots, m$
- ✗ · A hat min. 1 EW mit geom. Viel. < alg. Viel.
- ✗ · Die EW sind paarweise verschieden, d.h. $\lambda_j \neq \lambda_i$, falls $i \neq j$
- ✓ · Es gibt positive relle Zahlen $\alpha > 0$, so dass $v^T A v \geq \alpha v^T v$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

Sonstige Aufgaben

Sei $V = \mathcal{P}_{\leq 2}(\mathbb{R})$ und $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$ so dass $\varphi : p \to \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$
Finde eine Basis von V, so dass $\varphi = I$.

$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ bzgl. Stanardbasis.

Wir suchen b_1, b_2, b_3 so dass

$$\begin{matrix} b_1(-1) = 1 & b_1(0) = 0 & b_1(1) = 0 \\ b_2(-1) = 0 & b_2(0) = 1 & b_2(1) = 0 \\ b_3(-1) = 0 & b_3(0) = 0 & b_3(1) = 1 \end{matrix}$$

erfüllt werden. Es sind immer zwei Nullstellen, damit können wir folgende Polynome konstruieren.

$$b_1(x) = \tfrac{1}{2} \cdot x \cdot (x-1)$$
$$b_2(x) = -1 \cdot (x-1)(x+1)$$
$$b_3(x) = \tfrac{1}{2} \cdot x \cdot (x+1)$$

Polynoms of form:

$$c \cdot \underbrace{(x-a) \cdot (x-b)}_{NS}$$

Gegeben sei die Abbildung $F : P_2 \to P_2,\ a(x) \to a'(x)$ und die Basis $\{x+1, x-1, x^2\}$. Gesucht ist die Abbildungsmatrix D.

Wir verwenden das Kochrezept:

$$F(x+1) = 1$$
$$F(x-1) = 1$$
$$F(x^2) = 2x$$

$$D = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{matrix}}_{\text{Vektor der } F(x+1) \text{ beschreibt}} & \begin{matrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit. Ein SP ist definiert als $\langle x, y \rangle_M = x^T M y$. Schreibe einen Ausdruck für x, so dass $\|Ax - b\|_M^2$ minimiert ist.

1. $\|Ax-b\|_M^2 = (Ax-b)^T M (Ax-b)$
2. $(Ax-b)^T V \Lambda V^T (Ax-b)$ | da $M = V \Lambda V^T$
3. $(Ax-b)^T V S S^T V^T (Ax-b)$ | $\Lambda = S \cdot S$ wobei $S = \sqrt{\Lambda}$

$$= (S^T V^T (Ax-b))^T (S^T V^T (Ax-b))$$
$$= \| \underbrace{S^T V^T A}_{} x - \underbrace{S^T V^T b}_{} \|_2^2$$
$$= \| Cx - d \|_2^2$$
$$x = (C^T C)^{-1} C^T d \quad | \text{ da } C^T C x = C^T d$$
$$= ((S^T V^T A)^T (S^T V^T A))^{-1} (S^T V^T A)^T (S^T V^T b)$$
$$= (A^T V S S^T V^T A)^{-1} (A^T S V V^T S^T b)$$
$$x = (A^T M A)^{-1} (A^T M b)$$

Berechnen Sie für $F(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ die Abb.matrix bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$F(b_1) = b_1 M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot b_1 + 2 b_2$$
$$F(b_2) = b_2 M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2$$
$$F(b_3) = b_3 M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot b_3 + 1 \cdot b_4$$
$$F(b_4) = b_4 M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot b_3 + 2 b_4$$

Somit erhalten wir die Koordinatenabbildung:

$$F_{[\mathcal{B}]} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimme die Menge P_2 mit $p(2) = 0$ und $p'(2) = 0$

$p(x) = ax^2 + bx + c \qquad p'(x) = 2ax + b$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauss-Elimination liefert $\mathcal{L}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Geben Sie die Normalgleichung für die kleinste Distanz von $g(t) = a + bt$ und $h(t) = c - s \cdot d$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$.

Gleichung: $a + t \cdot b - c - s \cdot d = 0 \Rightarrow (b \ \ {-d}) \cdot \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = (c - a)$

Normalgleichung: $(b \ \ {-d})^T (b \ \ {-d}) \cdot \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = (b \ \ {-d})^T (c - a)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} b^T b & -d^T b \\ -d^T b & d^T d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^T (c-a) \\ -d^T (c-a) \end{pmatrix}$$

Gegen sei ein SP über $\mathbb{R}^n$. Definieren Sie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass $\langle x, y \rangle = x^T A y$

Die Matrix setzt sich aus dem SP der Einheitsvektoren zusammen.

$$A_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$$

Mithilfe der Linearität und Symmetrie des SP gilt:

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j \right\rangle = \sum_j y_j \sum_i x_i \langle e_j, e_i \rangle$$
$$= x^T A y$$

Charakterisieren Sie die Menge der Matrizen A die ein SP $x^T A y$ definieren.

Die Matrix muss symmetrisch und positive definit sein.

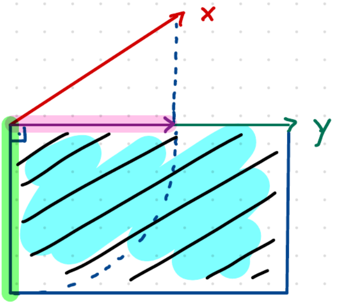
1. $x^T A (y + z) = x^T A y + x^T A z$
2. $x^T A y = (x^T A y)^T = y^T A^T x = y^T A x$
3. $x^T A x > 0$ | per def. positive definit

Welche Bedingung muss M erfüllen, damit ihre Spalten eine Orthonormalbasis bzgl. SP mit A bilden.

Für m_i, m_j von M muss gelten $m_i^T A m_j = \delta_{ij}$.
Daraus ergibt sich $M^T A M = I$.

Geometrische Interpretation

Skalarprodukt



Fläche der Projektion und y: $\langle x, y \rangle$

Länge der Projektion: $\langle x, y \rangle / \|y\|$

Vektor der Projektion: $\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|} \cdot \frac{y}{\|y\|}$

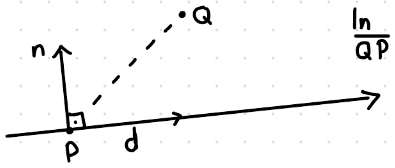
$Ax = b$

Wir können $Ax = b$ darstellen als:

$$\begin{matrix} \alpha_{11} \cdot x_n & + & \alpha_{12} x_{n-1} + \dots & + & \alpha_{1n} \cdot x_1 & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \alpha_{n1} \cdot x_n & + & \alpha_{n2} \cdot x_{n-1} + \dots & + & \alpha_{nn} \cdot x_1 & = b_n \end{matrix}$$

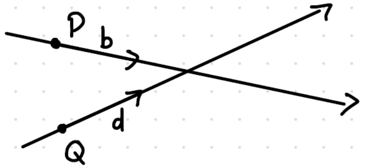
Das Resultat $x_n = \dots, x_1 = \dots$ entspricht dem „schneiden" der einzelnen linearen Gleichungen, respektiv ihrer geometrischen Interpretation.

Distance



In $\mathbb{R}^2$ bilden wir $\overline{QP}$ auf n ab

$\mathbb{R}^3$: $\frac{\|\overline{QP} \times d\|}{\|d\|}$



$\mathbb{R}_3$: $\frac{\langle b \times d, \overline{PQ} \rangle}{\|b \times d\|}$

Kochrezepte

Abbildungsmatrix

Spezialfall Standardbasis: $F: (V, A) \rightarrow (W, B),\ v \rightarrow F(v)$
Gesucht $M_B^A(F)$:

① Berechne $F(a_i)$ für $i = 1 \dots n$
② Erstelle $M_B^A(F) = (F(a_1), \dots, F(a_n))$

<u>von V nach W</u>

Allgemeiner Fall:

① Schreibe $F(a_i),\ i = 1, \dots, n$ in Koordinaten von B, dass heisst:

$$F(a_i) = \sum_{j=1}^{m} u_j b_j$$

② Erstelle $M_B^A(F) = (F(a_1), \dots, F(a_n))$

Bsp. $G: P_2 \to P_1,\ p(x) \to 2p'(x) + 1$

Gesucht ist M_B^A für $A = \{x^2 + x + 1, x + 1, x\}$ und $B = \{x + 1, 1\}$

Lösung: G bzgl. Standartbasis S: $\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + 1 \\ 4\alpha_2 \end{pmatrix}$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} G(a_1) &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \\ 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}_S \\ \Rightarrow T_B^S \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}_S &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}_B \end{aligned} \right\}$$

Für alle a machen ergibt Spalten von M_B^A.

Allgemeine Formeln

Mitternachtsformel: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Kreisgleichung: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Sin/Cos: $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \cdot \sin(y)$

Summen: $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

deg	rad	sin	cos	tan	cot
$0°$	0	0	1	0	un.
$30°$	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$45°$	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$60°$	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
$90°$	$\pi/2$	1	0	un.	0
$120°$	$\frac{2\pi}{3}$	$\sqrt{3}/2$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$135°$	$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$150°$	$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{\ }$
$180°$	π	0	-1	0	un.

Beweise

Sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix. Zeigen Sie, dass $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$.

$$\|Qx\|_2^2 = \langle Qx, Qx\rangle = (Qx)^T(Qx) = x^TQ^TQx = x^TIx$$
$$= x^Tx = \langle x, x\rangle = \|x\|_2^2 \quad \square$$

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrisch und $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$, zeige, dass für das LGS: $\begin{pmatrix} A \\ wI \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

eine Matrix Q existiert und n-Werte d, so dass die Least-Squares Lösung wiefolgt aussieht:

$$x^* = Q^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1+w} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} Q(Ab_1 + wb_2)$$

Normalgleichung: $(A^2 + w^2I)x = (Ab_1 + wb_2)$

A ist diagonalisierbar: $A = Q^T\Lambda Q \quad A^2 = Q^T\Lambda^2 Q$

Einsetzen: $A^2 + w^2I = Q^T\Lambda Q + Q^Tw^2IQ$

$$\Rightarrow (A^2 + w^2I)^{-1} = Q \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1^2+w^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} Q^T$$

$$\Rightarrow x^* = Q^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1^2+w^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} Q(Ab_1 + wb_2) \quad \square$$

Sei $M \in \mathbb{E}^{n\times n}$ symmetrisch, so dass $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ gilt dass $x^TMx > 0$. Zeige dass $\langle x, y\rangle_M = x^TMy$ ein SP ist.

Linearität im 2ten Faktor:

$$\langle x, \alpha y + z\rangle_M = x^TM(\alpha y + z) = \alpha x^TMy + x^TMz = \alpha\langle x, y\rangle_M + \langle x, z\rangle_M$$

Symmetrie:

$$\langle x, y\rangle_M = x^TMy = (x^TMy)^T = y^TM^Tx = y^TMx = \langle y, x\rangle$$

da M und die 1x1 Matrix x^TMy symmetrisch sind.

Positiv definit:

$$\langle x, x\rangle_M = x^TMx \geqslant 0$$
$$\langle x, x\rangle_M = x^TMx = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

da M positiv definit ist. $\square$

Zeige dass wenn $x \in \mathrm{Ker}(A^TA)$ gilt, auch $x \in \mathrm{Ker}(A)$ gilt.

$$A^TAx = 0$$
$$x^TA^TAx = 0$$
$$(Ax)^TAx = 0$$
$$\|Ax\|^2 = 0$$
$$\Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(A)$$

oder

$$A^TAx = 0 \Leftrightarrow A^Ty = 0$$
$$y \in R(A) \text{ und } y \in N(A^H)$$
$$\Rightarrow y \in R(A) \cap N(A^H)$$
$$\Rightarrow y \in \{0\} \Rightarrow x \in \ker(A)$$

Zeige dass wenn λ ein EW von AB ist, λ auch ein EW von BA ist, wenn A und B quadratisch sind.

Wir wollen zeigen, dass y existiert, so dass $BAy = \lambda y$.
Wir wählen $Bx = y$.

$$BAy = BABx = B(\lambda x) = \lambda(Bx) = \lambda y$$

Zeige dass $\forall x,y \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle_V + \langle x-y, x-y\rangle_V \\ &= \underline{\langle x+y, x\rangle_V} + \underline{\langle x+y, y\rangle_V} + \underline{\langle x-y, x\rangle_V} - \underline{\langle x-y, y\rangle_V} \\ &= \langle x, x+y\rangle_V + \langle y, x+y\rangle_V + \langle x, x-y\rangle_V - \langle y, x-y\rangle_V \\ &= \dots \\ &= 2\langle x, x\rangle_V + 2\langle y, y\rangle_V = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)\end{aligned}$$

Sei $V = P_n^{[0,1]}$ der Raum der Polynome von Grad $\leq n$ über den Intervall $[0,1]$. Zeigen Sie dass kein SP existiert dass die ∞-Norm induziert.

∞-Norm: $\max\limits_{t \in [0,1]} |p(t)|$

Wir zeigen dies mit einem Gegenbeispiel, wir wählen $x(t) = t^2$ und $y(t) = 1 - t^2$.

$$\|x+y\|_\infty^2 + \|x-y\|_\infty^2 \neq 2(\|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2)$$
$$\|t^2+1-t^2\|_\infty^2 + \|t^2-1+t^2\|_\infty^2 \neq 2(\|t^2\|_\infty^2 + \|1-t^2\|_\infty^2)$$
$$1^2 + 1^2 \neq 2(1^2 + 1^2)$$
$$2 \neq 4$$

Gegeben sei $A = V\Lambda V^T$ und $\pi(A) = a_mA^m + \dots + a_1A$. Zeigen Sie dass $\pi(A) = V\,\mathrm{diag}(\pi(\lambda_1), \dots, \pi(\lambda_n))\,V^T$

$A^k = V\Lambda^kV$ weiter gilt $\alpha A^k + \beta A^l = V(\alpha\Lambda^k + \beta\Lambda^l)V^T$

Für ein beliebiges $\pi(A)$ gilt damit:

$$\begin{aligned}a_nA^n + \dots + a_1A &= a_nV\Lambda^nV^T + \dots a_1V\Lambda V^T \\ &= V(a_n\Lambda^n + \dots + a_1\Lambda)V^T \\ &= V(\mathrm{diag}(\pi(\lambda_1), \dots, \pi(\lambda_n))V^T\end{aligned}$$

Sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $c \in C$. Zeigen Sie, dass für jeder EW λ von M, $\lambda + c$ ein EW von $M + c\cdot I$ ist.

$$Mx = \lambda x \qquad \Rightarrow (M + cI)x = Mx + cx$$
$$= \lambda x + cx$$
$$= (\lambda + c)x$$

Somit ist $\lambda + c$ ein EW von $M + cI$.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal und n ungerade. Zeigen Sie dass entweder $A - I$ oder $A + I$ singulär ist. Wenn beides möglich ist geben Sie ein Bsp.

$$(A \pm I)x = Ax \pm x = 0 \quad \Rightarrow Ax = \pm x = \lambda x.$$

$\Rightarrow$ A hat EW $\lambda = \pm 1$. Da A orthogonal (längentreu) ist haben alle EW den komplexen Betrag 1. Da komplexe EW immer auch komplex-konjugiert vorkommen und n ungerade, muss ein reeler EW $\lambda = \pm 1$ existieren. $\Rightarrow \ker A \pm I$ nicht trivial.

$\Rightarrow A \pm I$ ist singulär. Bsp. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mit $m > n$ und Rang $A < n$ und $b \in \mathbb{C}^n$. Zeigen Sie dass $A^HAx = A^Hb$ immer ∞ Lösungen hat.

$$A^H(Ax - b) = 0 \quad \Rightarrow Ax - b \in N(A^H)$$

Satz. 6.9 $\quad C^m = \underset{b_n}{N(A^H)} \oplus \underset{b_r}{R(A)} \quad \Rightarrow b = b_n + b_r$

$$b_r = Ax_b \quad \Rightarrow \quad b = b_n + b_r \quad \Rightarrow Ax_b - b = -b_n$$
$$= b_n + Ax_b$$

Insgesamt $A^H(Ax_b - b) = -A^H - b_n = 0$

Da Rang $A < n$ und $n < m$ ist $\ker A^HA$ nicht trivial und daher gibt es ∞ Lösungen.

Gegeben sei eine Blockmatrix $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, zeigen Sie, dass $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\cdot\det(C)$.

Wir sehen, dass nur die Permutationen $p(1), \dots, p(m)$ einen Beitrag leisten. Die relevanten Permutationen sind von der Form

$$(1, \dots, m; m+1, \dots, n) \longmapsto (p_A(1), \dots, p_A(n); m + p_C(1), \dots, p_C(n-m))$$

Mit $p_A \in S_m$, $p_C \in S_{n-m}$ und $\mathrm{sign}_p = \mathrm{sign}_{p_A} \cdot \mathrm{sign}_{p_C}$

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \sum_{\substack{p_A \in S_m \\ p_C \in S_{n-m}}} \mathrm{sign}_{p_A} \cdot \mathrm{sign}_{p_C} \cdot a_{1,p_A(1)} \cdot\dots\cdot a_{m,p_A(m)} \times c_{1,p_C(1)} \cdots c_{n-m,p_C(n-m)}$$

$$= \sum_{p_A \in S_m} \mathrm{sign}_{p_A} \cdot a_{1,p_A(1)} \cdot\dots\cdot a_{m,p_A(m)} \times \sum_{p_C \in S_{n-m}} \cdot \mathrm{sign}_{p_C} \cdot c_{1,p_C(1)} \cdots c_{n-m,p_C(n-m)}$$

$$= \det A \cdot \det C$$

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, Rang $A = 1$, Spur $A \neq 0$. Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist.

Wir wissen, dass wenn $n > 1$ und Rang $A = 1$, es einen EW 0 mit $n-1$ geometrischer Vielfachheit gibt. Die alg. Vielfachheit muss ≥ sein.

$$\Rightarrow \chi_A(\lambda) = (\lambda - 0)^{n-1}(b \cdot \lambda + c) \qquad b, c \in \mathbb{R}$$

Wir sehen $c = \text{Spur}\, A \cdot (-1)^{n-1}$. Da Spur $\neq 0$, muss es einen weiteren EW $\neq 0$ geben, mit geom. Vielfachheit 1. Damit haben wir n l.u. EV und somit ist A diagonalisierbar.

Sei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$

Zeigen Sie, dass A nur über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist, falls gilt $a = b = c = 0$.

Damit A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist, muss gelten:

- χ_A zerfällt komplett in Linearfaktoren über $\mathbb{R}$ keine komplexe Nullstellen.
- geom. Viel. = alg. Viel, d.h. überprüfen ob dim der einzelnen Eigenräume E_λ = vielfachheit der Nullstelle.

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + (a^2 + b^2 + c^2)) \Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \lambda_{2,3} = \sqrt{-(a^2+b^2+c^2)}$$

Nur für $a = b = c = 0$ existiert ein $\lambda_{2,3} \in \mathbb{R}$, bzw. nur dann zerfällt χ_A in Linearfaktoren über $\mathbb{R}$.

Gegeben sei $A = V \Lambda V^{-1}$. Nehmen wir an es gibt einen dominanten EW λ_1 (d.h. $|\lambda_1| > |\lambda_i|$). Mit einem zufälligen a_0 und dem Iterationschritt:

$$a_k = \frac{A a_{k-1}}{\| A a_{k-1} \|}$$

Zeigen Sie dass nach genügend iterationen a_k ein EV zu λ_1 ist.

$$a_0 = Vb = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i \Rightarrow \tilde{a}_k = A^k \sum_{i=1}^{n} b_i v_i = \sum_{i=1}^{n} b_i \lambda_i^k v_i$$

Wir klammer λ_1 aus $\quad \tilde{a} = \lambda_1^k \left(b_1 \cdot v_1 + \sum_{i=2}^{n} b_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k v_i\right)$

Es gilt $\frac{\lambda_i}{\lambda_1} = l_i$, $|l_i| < 1$ (da $\lambda_1 > \lambda_i$) und $\lim_{k \to \infty} l_i^k = 0$. D.h. $\tilde{a}_k = \lambda_1^k \cdot b_1 \cdot v_1$ für $k \to \infty$.

$$a_k = \frac{\lambda_1^k \cdot b_1 \cdot v_1}{\| \lambda_1^k \cdot b_1 \cdot v_1 \|} = c \cdot \frac{v_1}{\|v_1\|} \quad \text{wobei } c \in \mathbb{C}, |c| = 1.$$

Also ist a_k ein normierter EV zu λ_1. Funktioniert nur wenn $b_1 \neq 0$.

Good Luck & ☺

You can do this!